Инварианты, полуинварианты

Бывают задачи, где что-то происходит, то есть: есть какой-то процесс (кто-то что-то закрашивает или режет фигуру). Нам нужно как-то контрлировать процесс, который проиходит рандомно. С такими задачами мы и будем учиться бороться.

Инварианты - это что-то совсем неизменное в процессе, например, сумма, произведение, периметр, площадь, четность, делимость.

Полуинвариант - это что-то, что может меняться, но не очень рандомно, а именно, только в одну сторону. Например, какая-то величина всегда уменьшается или всегда увеличивается.

Задача 1 Можно ли доску 8×8 разрезать по границам клеток на части и сложить из этих частей клетчатый прямоугольник 5×13?

Решение: Заметим, что при разрезании площадь не меняется (то есть инвариант в этой задаче – площадь), но площадь изначальной фигуры рана 64, а площадь желаемой фигуры равна 65, поэтому требуемое разрезание невозможно.

Понятно, что в некоторых задачках совсем очевидно за что можно зацепиться, но это не всегда так, поэтому важно обращать внимание не только на решения, но и на рассуждения: как можно подойти к тем или инным инвариантам.

Задача 2 На листке написаны целые числа от 1 до 20. Можно стереть любые два числа a и b и записать число $a + b$. В конце осталось одно число. Чему оно может быть равно?

Решение: Заметим, что при такой операции сумма всех чисел – инвариантна, поэтому оставшееся число — это просто сумма всех чисел. Осталось ее посчитать $1 + 2 + \cdots + 20 = \frac{20 \cdot 21}{2} = 210$. Получили, что на доске осталось число 210.

Задача 3 На листке написаны все неотрицательные целые числа, не превосходящие 100. За один ход можно стереть любые два числа a и b и записать число ab. В конце осталось одно число. Чему оно может быть равно?

Решение 1: На доске написаны числа $0, 1, \cdots 100$ (не забываем про 0!). Заметим, что при такой операции произведение всех чисел – инвариантно, поэтому в конце осталось число равное произведению чисел, то есть 0.

Решение 2: Заметим, что на доске всегда останется ноль (это и есть инвариант). Действительно, если мы не делаем операцию с нулем, то он остается на доске, а если мы используем в нашей операции ноль, то результат произведения будет равен нулю, то есть мы запишем ноль на доску. Так как в конце осталось одно число, а ноль всегда присутствует, то оставшееся число равно нулю.

Задача 4 Разменный автомат меняет одну монету на пять других. Можно ли с его помощью разменять одну монету на 100 монет?

Решение: 1 Заметим, что за каждый ход у нас количество монет увеличивается на 4. Выпишем первые числа, которые будем получать: $1, 5, 9, 13 \cdots$. Давайте докажем, что все числа, которые мы можем получить, меняя монеты , нечетные. Действительно, изначально монета одна, число монет нечетное. Каждый раз число монет увеличивается на четное число (на 4), поэтому четность количества монет не поменяется и останется нечетной. Так как 100 – четное, его получить нельзя.

Решение 2: Заметим, что количество монет дает остаток 1 при делении на 4. Действительно, изначально монета одна, а дальше за одну операцию мы прибавляем 4 монеты к нашему количеству, что не меняет остаток при делении на 4. Но 100 дает остаток ноль при делении на 4, таким образом, это количество получиться не могло.

Мысль: Если вы сходу не видите какой-то инвариант, но при этом вы можете сделать первые несколько действий – сделайте, не надо просто сидеть и смотреть на задачу:)

Задача 5 Дана доска 8×8, раскрашенная в шахматном порядке. За одно действие можно выбрать любые две соседние клетки и перекрасить их в противоположные цвета: белые в черный, а черные в белый. Можно ли за несколько действий оставить на доске ровно одну черную клетку?

Лажа: Берем две соседние клетки, черную и белую, перекрашиваем. Заметим, что было 32 белые и 32 черные клетки, столько же и стало. Ну все, значит, количество не меняется, а так как нам нужно получить одну черную клетку, то это невозможно.

Мы сделали следующую логическую ошибку: мы проверили, что после первого действия ничего не поменялось и утверждаем, что ничего не поменяется всегда, но это неправда! Конкретно в этой задачи, после первого хода, могут образоваться две соседние белые клетки, поэтому наше рассуждение будет неверным. Давайте приведем правильное решение.

Решение: Давайте рассмотрим несколько вариантов, а именно, как могли перекраситься две соседние клетки.

ББ $\to$ ЧЧ

БЧ $\to$ ЧБ

ЧЧ $\to$ ББ

Заметим, что после перекрашивания четность количества черных клеток не меняется. В начале черных клеток 32 – четное количество, поэтому получить одну черную клетку не получится.

Задача 6 В языке Древнего Московского Племени алфавит состоит всего из двух букв: «М» и «О». Два слова являются синонимами, если одно из другого можно получить при помощи исключения или добавления буквосочетаний «МО» и «ООММ», повторяемых в любом порядке и любом количестве. Являются ли синонимами в языке Древнего Московского Племени слова «ММО» и «ОММО»?

Решение 1: Заметим, что при исключении или добавлении буквосочетаний «МО» или «ООММ» четность букв в слове не меняется (это и есть инвариант). Так как в словах «ММО» и «ОММО» четность букв разная, то эти слова не могут быть синонимами.

Решение 2: Посмотрим на четность разности количества букв «О» и «М» в слове. Так как в буквосочетаниях «МО» и «ООММ» количество букв «О» и «М» равное, то при их добавлении или исключении из слова, разность количества букв «О» и «М» в слове не меняется. Осталось заметить, что в словах «ММО» и «ОММО» эта разность равна 1 и 0 соответственно, значит, данные слова не синонимы.

Задача 7 Даны три кучки камней, по n камней в каждой. За один ход можно выбрать две кучки, убрать из них по одному камню, при этом добавив один камень в третью кучку.

При каких n можно через несколько ходов оставить только один камень?

Решение: Хм.. С чего бы начать? Давайте возьмем число $n = 7$ и посмотрим, что мы вообще можем получить.

7 7 7

6 6 8

7 5 7

8 4 6

7 5 5

8 4 4

7 3 5

Заметим, что три числа всегда одной четности. Докажем это. Пусть у нас были числа Ч Ч Ч, так как все числа изменяются на 1, станет Н Н Н. Аналогично, если было Н Н Н, так как все числа изменяются на 1, станет Ч Ч Ч. Таким образом, 0 0 1 мы получить не сможем.

Мысль: Идею четности держим в голове всегда!

Задача 8 В клетках таблицы 99×99 расставлены плюсы и минусы. Если в каком-то ряду (строке или столбце) минусов больше чем плюсов, разрешается в этом ряду поменять все знаки на противоположные. Докажите, что через некоторое время и во всех строках, и во всех столбцах плюсов будет больше чем минусов.

Решение: Заметим следующий полуинвариант: количество плюсиков во всей таблице после операции увеличивается. Действительно, рассмотрим строчку или столбец в котором мы проводили операцию, во всей доске, кроме рассмотренной линии, количество плюсов не изменилось, а в самой линии увеличилось, поэтому и во всей доске увеличилось. Теперь поймем, что количество плюсиков не может стать больше 99^2, поэтому количество проделанных операций конечно (за каждую операцию количество плюсиков увеличивается хотя бы на 1 и ограничено числом 99^2)). Осталось теперь рассмотреть момент, когда мы не можем сделать операцию, если бы нашлась линия, в которой минусов больше чем плюсов, то мы бы смогли применить к ней операцию и увеличить число плюсов, что противоречит рассмотренному моменту.

Задача 9: На доске написаны три числа. Каждую минуту они изменяются по следующему правилу: если на данный момент на доске находятся числа x, y, z, то они меняются на $2x-2y+z-1$, $2y-2z+x-1$, $2z-2x+y-1$ соответственно. Докажите, что когда-нибудь на доске появится отрицательное число.

Решение: Давайте проверим сумму всех чисел. Была: $x+y+z$, стала: $2x-2y+z-1+2y-2z+x-1+2z-2x+y-1 = x+y+z-3$. То есть сумма является полуинвариантом и всегда уменьшается на 3, а значит, когда-то она станет отрицательной, но тогда хотя бы одно из чисел отрицательно, что нам и требовалось доказать.

Мысль: Видишь задачу с процессом? Перебери самые популярные инварианты и полуинварианты: четность, сумма, произведение, площадь, периметр, делимость.

Задача 10 У каждого депутата в парламенте не более трёх врагов (вражда обоюдна). Парламент разбит на 2 палаты. Каждый день один из депутатов, обнаружив в своей палате не менее двух врагов, переходит в другую палату. Докажите, что рано или поздно переходы прекратятся.

Решение: Давайте рассмотрим на количество пар враждующих между палатами. Заметим, что оно увеличивается. Действительно, для того чтобы депутат сделал переход из палаты А в палату Б, у него в палате А должно быть хотя бы 2 врага, тогда между палатами у него не больше 1 врага (так как всего не больше 3-х врагов). После его перехода между палатами у него стало хотя бы 2 вражды. Значит, количество враждующих пар между палатами увеличивается. Общее количество пар врагов число конечно, количество пар врагов между палатами не может его перерасти, поэтому в какой-то момент переходы прекратятся.

Задача 11 На квадратном поле 10×10 девять клеток 1×1 поросли бурьяном. После этого бурьян может распространиться на клетку, у которой не менее двух соседних клеток уже поросли бурьяном. Докажите, что тем не менее бурьян не сможет распространиться на все клетки.

Решение: Рассмотрим один из частых полуинвариантов/инвариантов – периметр. Давайте посмотрим как изменяется периметр всех клеток, которые проросли бурьяном, когда прорастает новая клетка. Возможны 4 случая (красным отметим новую клетку, а черным старые):

Значит полуинвариант такой: периметр рассматриваемой области не увеличивается. Периметр исходных клеток не больше чем $4 \cdot 9 = 36$, но периметр всего квадрата 40, что больше чем 36, поэтому весь квадрат зарасти не мог.

Задача 12 На доске написаны натуральные числа от 1 до 100, каждое по одному разу. Каждую минуту мальчик Лёша выбирает два числа a и b, написанных на доске, вычисляет НОД$(a^2 + b^2 + 2, a^2b^2 + 3)$, пишет его на доску, а сами числа стирает. Через 99 минут на доске останется одно число. Докажите, что оно не может быть квадратом.

Решение: Как вообще можно доказать что число не квадрат? Задачка явно как-то связана с теорией чисел, давайте используем что-то из ТЧ. Например, квадрат числа не может давать остаток 3 при делении на 4. Почему? Ну давайте просто рассмотрим остатки x и x^2 при делении на 4.

x	x^2
0	0
1	1
2	0
3	1

Но мы используем НОД, поэтому это нам не очень удобно отслеживать. Рассмотрим другой способ: если число не квадрат, то в его разложении есть простое число в нечетной степени. Но мы поступим тут немного наглее, докажем, что существует p, такое что оставшееся число делится на p, но не делится на p^2. Посмотрим на число 3.

1)Если $a, b \vdots 3$, то НОД$(a^2+b^2+2, a^2b^2+3) \not\vdots 3$

2) Если $a \vdots 3, b \not\vdots 3$. Тогда b^2 дает остаток 1 при делении на 3, поэтому НОД$(a^2+b^2+2, a^2b^2+3) \vdots 3$

3) Если $a, b \not\vdots 3$, то НОД$(a^2+b^2+2, a^2b^2+3) \not\vdots 3$

Мы нашли инвариант! Четность количества чисел, которые делятся на 3, не меняется. Изначально их было 33, значит, последнее число делится на 3. Покажем, что оно не делится на 9. То есть были в конце числа a, b, мы их заменили на НОД(a^2+b^2+2, a^2b^2+3), при этом этом так как последнее число делится на 3, то это могло быть только во 2-ом случае (только в этом случае НОД делится на 3). Но давайте заметим, что a^2b^2+3 точно не делится на 9 в этом случае, а значит, и НОД $(a^2+b^2+2, a^2b^2+3) \not\vdots 9$. Таким образом, последнее число не квадрат.

Принцип крайнего

Что такое принцип крайнего? Иногда бывает, что в задаче мы выбираем какой-то особенный объект, с которым условие задачи работает по-особенному, например, самое большое число, самое маленькое число, что-то самое левое или самое правое. Давайте посмотрим на первую задачу, и тогда станет понятнее, о чем идет речь.

Задача 1 Можно ли расставить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 20 в строку так, чтобы в каждой паре соседних одно из чисел делилось на другое?

Решение: Заметим, что какие-то числа расставлять проще, а какие-то сложнее, например, единица делится на что угодно, поэтому надо подумать, какое число «особенное» в этой задаче.

Давайте рассмотрим число 7. На него ничего не делится, а 7 делится только на 1, поэтому 7 точно стоит с краю, а рядом с ним 1. Давайте теперь посмотрим теперь на числа 9 и 5. На девять делится только на 3 и 1, а на 9 не делится ничего, а 5 делится на только 1, а на пять делится только 20. Значит, рядом с 1 стоит либо 5, либо 9. Пусть стоит 5, значит следом 20, но тогда 9 стоит точно на другом конце, а рядом 3. Дальше все однозначно определяется и получаем такую расстановку: 7, 1, 5, 20, 4, 8, 2, 6, 3, 9. На самом деле, если бы мы поставили рядом с 1 число 9, то получили бы тоже подходящую расстановку: 7, 1, 9, 3, 6, 2, 8, 4, 20, 5.

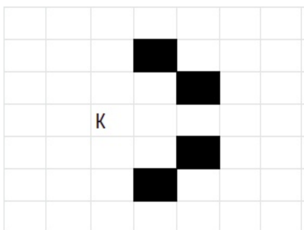
Понятно, что если в задаче вопрос: «можно ли ...?», и вы нашли пример, то нужно только написать: «Да, можно.» и привести пример.

Задача 2 Несколько шестиклассников встали в круг. Оказалось, что каждый из шестиклассников не выше ростом хотя бы одного из своих соседей. Могут ли все они быть разного роста?

Решение: Предположим, что такое возможно. Рассмотрим самого высокого человека А. По условию А не выше ростом хотя бы одного из своих соседей, но строго ниже быть не может, в силу нашего выбора. Таким образом, рядом с А стоит хотя бы один человек такого же роста, значит, наше предположение неверно.

Задача 3 Можно ли расставить на клетчатой плоскости несколько коней так, чтобы каждый бил хотя бы пять других?

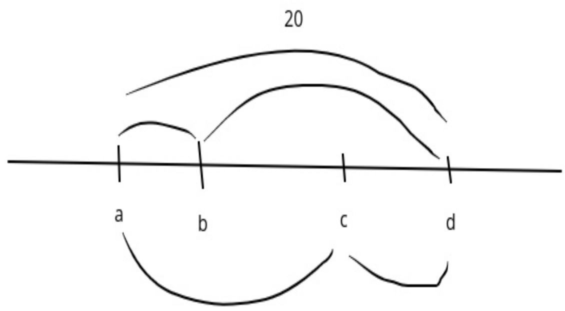
Решение: Рассмотрим самого левого коня, если их несколько, то любого из них. Он может бить только те клетки, которые находятся правее.



То есть рассмотренный конь может бить не больше четырех коней, получили противоречие.

Задача 4 Существуют ли 4 числа, попарные разности между которыми равны 3, 5, 8, 11, 12 и 20?

Решение: Давайте упорядочим наши числа $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$. Понятно, что если такое возможно, то $d - a = 20$. Рассмотрим числовую прямую:



Заметим, что тогда у нас должно быть еще 2 пары чисел с суммой 20, но среди написанных чисел такая пара только одна, значит, такого быть не могло.

Задача 7 В каждой клетке шахматной доски записано число. Оказалось, что любое число равно среднему арифметическому чисел, записанных в соседних (по стороне) клетках. Докажите, что все числа равны.

Решение: Давайте рассмотрим максимальное число m, если таких несколько, то любое. Тогда все соседи, чтобы их среднее арифметическое было равно m, должны быть сами равны m (если есть число, которое строго меньше, тогда и среднее арифметическое будет меньше m). Так как соседи тоже являются максимальными, то рядом с ними числа тоже равны m. Таким образом, все числа в таблице равны m.

Задача 8 Известно, что если у двух жителей деревни V поровну знакомых среди односельчан, то общих знакомых у них нет. Докажите, что найдётся житель, у которого ровно один знакомый односельчанин.

Решение: Введем граф в задаче (шутки кончились!). Вершинами будем называть жителей, ребром будем соединять вершины, если жители знакомы. Степень вершины – это количество ребер из нее выходящих.

Давайте рассмотрим человека А с наибольшим числом знакомых. Пусть степень А равна n. Заметим, что если жители имеют общего знакомого, то среди них нет жителей с равным количеством знакомых. Значит, у всех знакомых А разная степень, при этом не больше чем n и хотя бы 1. Получается, что знакомые А имеют степени $1, 2, \cdots n$, а значит, есть житель, у которого ровно один знакомый односельчанин.

Упорядочивание

Как мы уже поняли, иногда бывает полезно рассмотреть самое большое или самое маленькое число, а иногда бывает полезно взять и упорядочить числа. Давайте посмотрим примеры таких задач.

Задача 1 Девять чисел таковы, что сумма каждых четырех из них меньше суммы пяти остальных. Докажите, что все числа положительны.

Решение: Давайте упорядочим числа $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_9$ (пишем знак меньше либо равно, потому что допускаем равенство). Теперь нам достаточно показать, что $a_1 > 0$. По условию $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 < a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$. Предположим, что $a_1 \leqslant 0$. Мы знаем, что $a_2 \leqslant a_6$, $a_3 \leqslant a_7$, $a_4 \leqslant a_8$, $a_5 \leqslant a_9$. Теперь, если сложить последние пять неравенств, то получится, что $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 \geqslant a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$, что противоречит условию. Значит, $a_1 > 0$.

Комментарий После упорядочивания задачу можно было дорешать иначе. Мы знаем, что $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 < a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$, запишем это в другом виде $a_1 > (a_6 - a_2) + (a_7 - a_3) + (a_8 - a_4) + (a_9 - a_5) > 0$. Получили то, что хотели.

Задача 2 В 10 коробках лежат карандаши (пустых коробок нет). Известно, что в разных коробках разное число карандашей, причем в каждой коробке все карандаши разных цветов. Докажите, что из каждой коробки можно выбрать по карандашу так, что все они будут разных цветов.

Решение: Упорядочим коробки по количеству карандашей $b_1 < b_2 < \cdots < b_{10}$. Хочется начинать с коробки, где карандашей меньше всего. Почему? Если мы начнем с коробки, где карандашей много, то можем случайно взять тот цвет, который лежит в коробке, где карандашей мало. В коробке b_1 есть хотя бы один карандаш, берем любой. В коробке b_2 карандашей хотя бы два и все разного цвета, поэтому найдется карандаш, отличный от того, который мы взяли. Те же самые рассуждения работают и дальше: на k-ом шаге в коробке b_k хотя бы k карандашей разного цвета, мы взяли только $k-1$ карандаш из предыдущих коробок, поэтому можем взять карандаш из коробки b_k, отличный по цвету от ранее взятых. Значит, из каждой коробки можно выбрать по карандашу так, что все они будут разных цветов.

Комментарий Старайтесь, когда пишите решение, избегать слов «и так далее», формализируйте свои рассуждения.

Задача 3 Имеется 10 отрезков, причем известно, что длина каждого — целое число сантиметров. Два самых коротких отрезка — по сантиметру, самый длинный — 50 см. Докажите, что среди отрезков найдутся три, из которых можно составить треугольник.

Решение: Давайте упорядочим наши отрезки. Для того чтобы из отрезков можно было составить треугольник, нужно проверить три неравенства треугольника, но если $a \leqslant b \leqslant c$, то достаточно проверить только одно, а именно, что $a + b > c$. Пусть $1 = a_1 = a_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots \leqslant a_9 \leqslant a_{10} = 50$. Будем решать задачу от противного. Если $a_2 < 2$, то мы можем составить треугольник из отрезков $1, 1, a_2$. Пусть треугольник составить нельзя, тогда $a_2 \geqslant 2$. Каким должен быть a_3, чтобы треугольника из отрезков $1, a_2, a_3$ не получилось? Надо испортить неравенство, то есть $1 + 2 \leqslant 1 + a_2 \leqslant a_3$. Чтобы треугольника из отрезков a_{i-2}, a_{i-1}, a_i не было, должно выполняться неравенство: $a_i \geqslant a_{i-2} + a_{i-1}$.

Но тогда, продолжив вычисления до a_{10}, получим, что $a_{10} \geqslant 55$, но по условию задачи $a_10 = 50$, значит, такого быть не могло и треугольник все-таки составить можно.

Задача 4 Учитель задумал несколько чисел, после чего выписал на доске всевозможные попарные суммы. На доске оказались выписаны числа: 1; 2,1; 2,2; 3,3; 5,1; 5,2; 6,3; 6,3; 7,4; 7,5. Помогите школьникам определить эти числа.

Решение: Для начала определим количество чисел. С одной стороны, на доске написано 10 сумм, с другой стороны, их $\frac{n(n-1)}{2}$. Значит, $n = 5$. Давайте упорядочим наши числа, пусть $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$. Тогда $a + b = 1$, $d + e = 7,5$ (взяли самую маленькую и большую сумму), также мы можем понять, что вторая по величине сумма - это $a + c = 2,1$, а $c+e = 7,4$. Все остальное определить однозначно не получится, но мы не отчаеваимся. Если сложить все возможные попарные суммы, то каждое число мы посчитаем четыре раза. Получается, что $4(a+b+c+d+e) = 1+2,1+2,2+3,3+5,1+5,2+6,3+6,3+7,4+7,5 = 46,4$. Из предыдущего уравнения находим, что $a+b+c+d+e = 11,6$. Теперь мы можем найти c, если вспомним, что $a + b = 1$ и $d + e = 7,5$. Таким образом, $c = 11,6 - 1 - 7,5 = 3,1$. Дальше, зная, что $a + c = 2,1$ и $c + e = 7,4$, получаем, что $a = -1$ и $e = 4,3$. Зная, что $a+b = 1$ и $a = -1$, получаем, что $b = 2$. Из того, что $d+e = 7,5$, а $e = 4,3$, получаем, что $d = 3,2$. Итоговый ответ:
a = -1
b = 2
c = 3,1
d = 3,2
e = 4,3
Если очень хочется, то можно его проверить, но это не обязательно.

Задача 5 На плоскости есть $3n$ точек, никакие три не лежат на одной прямой. Докажите, что их можно разбить на n непересекающихся треугольников.

Решение: Давайте возьмем вертикальную прямую и начнем ее двигать слева направо. Как только встречаем очередную точку, нумеруем ее. Если на прямую попало две точки, то нумеруем как-нибудь. Ну теперь разобьем точки на треугольники естественным образом: $(1, 2, 3); (4, 5, 6); \cdots (3n - 2, 3n - 1, 3n)$. Треугольники не будут пересекаться, потому что треугольник раньше левее, чем треугольник позже.

Задача 5 Есть 20 различных натуральных чисел, не превосходящих 100. Докажите, что среди их попарных разностей есть три одинаковые.

Решение: Сразу упорядочим наши числа, пусть $1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_{20} \leqslant 100$. Всего положительных разностей у нас $\frac{20\cdot 19}{2} = 190$, значения, которые могут принимать разности лежат в диапазоне от 1 до 99, и тут хочется сказать, что мы уже победили, но нет, так мы докажем, что только значения у каких-то двух разностей совпадут. Поэтому действовать надо как-то иначе.

Давайте рассматривать разности только между соседними числами, конечно, нам никто не обещал, что мы найдем среди них три равных, но если у нас получится, то мы решим задачу. Заметим, что сумма разностей между соседними числами не превосходит длины отрезка, на котором расположены все числа, то есть 99. Давайте теперь оценим ее подругому. Разностей между соседними числами 19, давайте рассмотрим их наименьшие значения (учитывая, что две одинаковые могут быть, а вот три уже нет). Это значения: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 10 (наименьшая разница равна 1). Поэтому минимальная возможная сумма для всех разностей между соседними числами равна $2(1+2+\cdots+9)+10=100$. Получили противоречие, значит, среди разностей между соседними числами есть три одинаковые.

Разложение на множители

Основная теорема арифметики

Каждое натуральное число n можно представить в виде $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ – простые числа, причём такое представление единственно, если не учитывать порядок следования множителей. Конечно же, доказывать мы ее не будем, в целях экономии времени.

Как считается НОД и НОК (наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное).

Разложим наши числа на простые множители $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ и $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$ $(\alpha_i, \beta_i \geqslant 0)$. Тогда НОД$(a, b) = p_1^{min(\alpha_1,\beta_1)} \cdot p_2^{min(\alpha_2,\beta_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{min(\alpha_k,\beta_k)}$, а НОК$(a, b) = p_1^{max(\alpha_1,\beta_1)} \cdot p_2^{max(\alpha_2,\beta_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{max(\alpha_k,\beta_k)}$

Например, НОД$(2^2 \cdot 3^5 \cdot 11, 2^5, 3^2, 7^2) = 2^2 \cdot 3^2$, а НОК$(2^2 \cdot 3^5 \cdot 11, 2^5, 3^2, 7^2) = 2^5 \cdot 3^5 \cdot 7^2 \cdot 11$.

Задача 1 Натуральные числа a, b и c таковы, что НОК$(a, b) = 90$ и НОК$(a, c) = 120$. Найдите НОК(b, c).

Решение: Для начала разложим на множители 90 и 120.

НОК$(a, b) = 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5(1)$

НОК$(a, c) = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5(2)$

Из (1) получается, что одно из чисел a или b делится на 3^2, но если бы a делилось на 3^2, то НОК(a, c) тоже бы делился на 3^2, значит, b делится на 3^2. Откуда взялось 2^3 в НОК(a, c)? Получается, что одно из чисел a или c делится на 2^3, но если бы a делилось на 2^3, то НОК(a, b) тоже бы делился на 2^3, значит, c делится на 2^3. Также поймем, что 3 входит в b ровно в степени 2, иначе в НОК степень была бы тоже больше, аналогично 2 входит в c ровно в степени 3, иначе в НОК степень была бы тоже больше. Значит, в НОК(b, c) 3 входит точно во 2 степени, а 2 входит точно в 3 степени, осталось понять входит 5 или не входит. Значит, НОК(b, c) равен 72 или 360.

Пример для 72: $a = 5 \cdot 2 \cdot 3, b = 3^2, c = 2^3$.

Пример для 360: $a = 5 \cdot 2 \cdot 3, b = 3^2 \cdot 5, c = 2^3$.

Задача 2 Можно ли вместо звездочек вставить в выражение

НОК$(*, *, *)$-НОК$(*, *, *) = 2009$

в некотором порядке шесть последовательных натуральных чисел так, чтобы равенство стало верным?

Решение: Для удобства запишем условие в таком виде: НОК(a, b, c)-НОК$(d, e, f) = 2009$. Для начала заметим, что $2009 = 7^2 \cdot 41$. Также, так как разность нечетная, то один НОК четный, а другой нечетный. Не теряя общности, пусть второй НОК(d, e, f) нечетный, получается, что d, e, f – нечетные. Среди шести последовательных чисел три четных и три нечетных, значит, a, b, c — четные. Значит и в первом и во втором НОКе числа имеют вид $k, k + 2, k + 4$. Числа такого вида дают разные остатки при делении на 3, поэтому среди них найдется число, которое делится на 3, но тогда НОК(a, b, c) и НОК(d, e, f) делится на 3, но тогда их разность должна делится на 3, но 2009 на три не делится — противоречие. Значит, такое невозможно.

Задача 3 Найдите все пары натуральных m, n таких, что
НОД$(m, n) = 2015!$, НОК$(m, n) = 2016!$
(Пары (m, n) и (n, m) считаются как одна пара.)

Решение: Так как НОД$(m, n) = 2015!$, то $m = 2015! \cdot x, n = 2015! \cdot y$, при этом НОД$(x, y) = 1$ (иначе мы бы могли забрать еще какой-то множитель в НОД(m, n)). Теперь если все поделить на $2015!$, то НОД$(x, y) = 1$, а НОК$(x, y) = 2016$. Эти два условия нам дают, что $xy = 2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Теперь так как НОД$(x, y) = 1$, то каждое простое входит только в одно из чисел x или y. Какие могут быть варианты?

1) $x = 1, y = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$
2) $x = 2^5, y = 3^2 \cdot 7$
3) $x = 3^2, y = 2^5 \cdot 7$
4) $x = 7, y = 2^5 \cdot 3^2$

Ну и наоборот, но пары (m, n) и (n, m) считаются как одна пара.

Таким образом, если мы домножим все числа в вариантах 1) - 2) мы как раз получим все ответы. Значит, всего 4 пары подходящих чисел.

Задача 4 Существуют ли такие 14 натуральных чисел, что при увеличении каждого из них на 1 произведение всех чисел увеличится ровно в 2008 раз?

Решение: Предположим, что такие числа существуют, тогда $\frac{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_{14}+1)}{a_1a_2\cdots a_{14}} = 2008 = 2^3 \cdot 251$. Откуда нам взять 251? Давайте просто попробуем взять число $a_1 = 250$ и запишем равенство снова, получим: $\frac{((a_2+1)\cdots(a_{14}+1)}{a_2\cdots a_{14}} = 2^4 \cdot 5^3$. Откуда теперь нам получить 5-ки? Давайте попробуем взять $a_2 = a_3 = a_4 = 4$ и подставить в наше равенство, получим: $\frac{(a_5+1)(a_6+1)\cdots(a_14+1)}{a_5a_6\cdots a_{14}} = 2^{10}$. Ну с двойками все просто: берем все числа равные 1, их как раз осталось ровно 10. Пример построился!

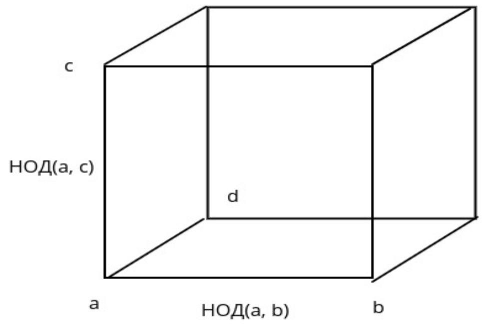
Комментарий: Понятно, что на олимпиаде нужно написать просто: «Да, существуют» и привести пример.

Задача 6 В произведении семи натуральных чисел каждый сомножитель уменьшили на 3. Могло ли произведение при этом увеличиться ровно в 13 раз?

Решение: Предположим, что могло и $\frac{(a-3)(b-3)(c-3)(d-3)(e-3)(f-3)(g-3)}{abcdefg} = 13$. Как вообще так получилось, что мы числа уменьшили, а произведение увеличилось? Например, $a = b = 1$, тогда $ab = 1$, а $(a-3)(b-3) = 4$. Давайте, для того чтобы получить 13, возьмем $a = 16$. Тогда $\frac{(b-3)(c-3)(d-3)(e-3)(f-3)(g-3)}{bcdefg} = 16$. Теперь возьмем $b = c = d = e = 1$, получим $\frac{(f-3)(g-3)}{fg} = 1$. Заметим, что числа $f = 2, g = 1$ подходят. Пример построился!

Задача 5 В вершинах куба записали восемь различных натуральных чисел, а на каждом его ребре — наибольший общий делитель двух чисел, записанных на концах этого ребра. Могла ли сумма всех чисел, записанных в вершинах, оказаться равной сумме всех чисел, записанных на ребрах?

Решение: Давайте докажем, что если числа a и b различны, то НОД$(a, b) \leqslant \frac{a+b}{3}$. Пусть $a < b$, тогда НОД$(a, b) \leqslant a$, а 2НОД$(a, b) \leqslant b$ (так как b делится на НОД(a, b), но равно быть не может, так как числа не равны и b большее число, значит, 2НОД$(a, b) \leqslant b$). Получили, что 3НОД$(a, b) \leqslant a + b$. Давайте для каждого ребра запишем полученную оценку и сложим все неравенства, каждая вершина используется в трех неравенствах, поэтому сумма всех НОДов меньше либо равна суммы всех чисел. Предположим, что эти суммы равны, тогда равенство достигается в каждом неравенстве, выше. То есть равенство возможно только при $b = 2a$ или $a = 2b$ (для каждого ребра). Не теряя общности пусть $a = 2b$,



но тогда: либо $c = b$, тогда нашлись два равных числа, либо $c = 4b$, но также $d = b$ или $d = 4b$, то есть в любом случае найдутся хотя бы два равных числа, противоречие, значит, равенства быть не могло. Таким образом, сумма всех НОДов меньше суммы всех чисел.

Задача 7 Натуральные числа от 1 до 2014 как-то разбили на пары, числа в каждой из пар сложили, а полученные 1007 сумм перемножили. Мог ли результат оказаться квадратом натурального числа?

Решение: Первое, что хочется сделать, - это разбить числа на такие пары:

$$(1; 2014), (2; 2013), (3, 2012), \cdots, (1007; 1008).$$

Но тогда произведение будет равно 2015^{1007}, но 1007 – это нечетное число, поэтому это будет не квадрат. Но давайте из этого поймем вот что: если у нас есть блок последовательных чисел (их должно быть, естественно, четное количество), то мы их можем разбить на пары таким же образом (первое с последним, второе с предпоследним и так далее), и если таких пар у нас будет четное количество, то произведение будет квадратом. Поэтому давайте отдельно разобьем числа от 1 до 6 на пары так, чтобы после сложения чисел в паре и умножения полученных сумм получился квадрат. Заметим, что подходит следующее разбиение: $1+5 = 6, 2+4 = 6, 3+6 = 9$. А оставшиеся числа разобьем уже известным нам способом:

$$(7; 2014), (8; 2013), \ldots, (1010; 1011).$$

Все суммы в парах равны 2021, а их количество равно 1004. Получается, что результат перемножения образовавшихся 1007 сумм равен $(3 \cdot 6 \cdot 2021^{502})^2$, что мы и хотели получить.

Авторские задачи

Задача 1 В детском саду есть коробка с шариками трёх цветов: красного, синего и зелёного. Всего в коробке 100 шариков. Однажды Паша достал из коробки 30 красных, 10 синих и 20 зелёных шариков, поиграл с ними, один потерял, а остальные вернул в коробку. На следующий день Саша достал из коробки 10 красных, 20 синих и 50 зелёных шариков. Шарик какого цвета потерял Паша? **Решение:** Заметим, что максимум доставали 30 красных, 20 синих и 50 зелёных шариков. Поскольку 30+20+50=100, в коробке изначально было как раз 30 красных, 20 синих и 50 зелёных шаров. Если потерянный шарик был синим или зелёным, значит, до его потери шариков соответствующего цвета было бы на 1 больше, что невозможно. Значит, потерян красный.

Задача 2 Дан выпуклый четырёхугольник ABCD, где $\angle BCD = 90°$. Пусть E - середина AB. Докажите, что $2EC \leq AD + BD$. **Решение 1:** Отразим точку B относительно прямой CD. Получим точку B'. Заметим, что CE — средняя линия треугольника BAB'. Значит, $AB' = 2CE$. При этом из симметрии $BD' = BD$. Тогда требуемое неравенство эквивалентно следующему: $AB' \leq AD+AB'$. А это в точности неравенство треугольника для BAB'. Таким образом, неравенство доказано. **Решение 2:** Отметим M — середину BD — и проведём MC. $MC = \dfrac{BD}{2}$ как медиана треугольника BCD, проведённая к гипотенузе. При этом $ME\dfrac{AD}{2}$ как средняя линия треугольника ABD. Из неравенства треугольника для BME получаем $CE \leq MC + ME$, или, что то же самое, $CE \leq \dfrac{BD}{2} + \dfrac{AD}{2}$. Требуемое получается из этого неравенства удвоением обеих частей.

Можно заметить, что эти решения одинаковы с точностью до гомотетии с центром в точке B и коэффициентом 2.

Задача 3 Дан остроугольный треугольник ABC. Пусть l - серединный перпендикуляр к отрезку AC. Прямая, параллельная BC и проходящая через точку A, пересекает l в точке X. Прямая, параллельная AB и проходящая через точку C, пересекает l в точке Y. Оказалось, что AX делит BY пополам. Докажите, что высота треугольника ABC, проведённая из вершины B, делит AX пополам. **Решение:** Пусть M — середина BC, и пусть AX пересекает CY в точке P. Тогда $ABCP$ - параллелограмм (т.к. имеет две пары параллельных сторон). KP параллельна BC и проходит через середину BY, а значит, является средней линией треугольника BCY. Отсюда $CP = PY$. Более того, $CP = PY = PM$, поскольку PM — медиана из прямого угла в треугольнике CMY. Далее, поскольку $ABCP$ - параллелограмм, $BP = MP$, так как диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам. Кроме того, $CB = AP$. Таким образом, треугольник ABM — равнобедренный, и его высота является также медианой. Значит, она параллельна MY и делит AM пополам, т.е. является средней линией в AMY и делит AY пополам, ч. и т. д.

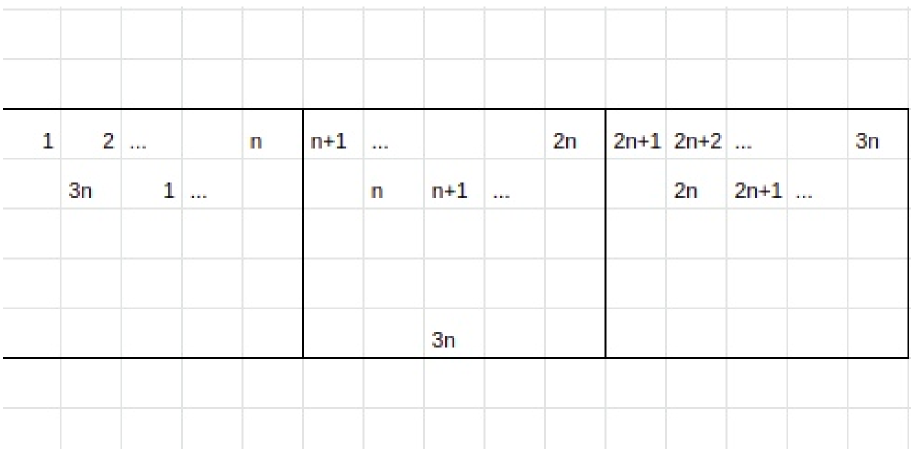
Задача 4: Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине A. BL — биссектриса. Точка D симметрична точке A относительно BL (и, очевидно, лежит на BC). M — центр описанной окружности треугольника ADC. (Ясно, что M лежит на BL : из симметрии BL перпендикулярна AD и делит её пополам, а серединный перпендикуляр к хорде всегда проходит через центр). Докажите, что CM, DL, AB пересекаются в одной точке. **Решение:** Пусть прямая CM вторично пересекает окружность в точке K. Тогда $\angle CAK$ прямой как опирающийся на диаметр. Значит, K лежит на прямой AB (сумма углов при точке A равна 180°), т.е. AB и CM пересекаются в K. Заметим теперь, что BM — биссектриса и медиана в треугольнике KBC. Значит, она является также и высотой и перпендикулярна KC. Отсюда следует, что $AD \parallel KC$, и $KADC$ — трапеция. По известному свойству трапеции, точка пересечения её диагоналей лежит на отрезке, соединяющем середины оснований.

Задача 5 [ВсОШ-2019, заключительный этап] Паша и Вова играют в следующую игру, делая ходы по очереди. Начинает Паша. Изначально перед мальчиками лежит большой кусок пластилина. За один ход Паша может разрезать любой из имеющихся кусков пластилина на три части (не обязательно равные). Вова своим ходом выбирает два куска и слепляет их вместе. Паша побеждает, если в некоторый момент среди имеющихся кусков пластилина окажется 100 кусков одинаковой массы. Может ли Вова помешать Паше победить?

Решение: Давайте считать, что изначальная масса куска пластилина равна 1 кг. Пусть Паша вначале сделает 400 ходов следующим образом: самый большой кусок x граммов будет делить на $1, 1, x-2$. Тогда ходы Вовы делятся на два типа: он либо слепляет $1+1$ (первый тип), либо делает что-то другое (второй тип). Почему разделение на ходы именно такое? Паша своим ходом прибавляет 2 куска весом 1г, и только ходом $1+1$ Вася может испортить два куска весом 1г. После 400 ходов Паши у нас появилось 800 кусков по 1 грамму, значит, у Вовы хотя бы 300 ходов были первого типа. Действительно, если ходов первого типа было меньше, то тогда он испортил не более $(300-k)\cdot 2+100+k = 700-k \leqslant 699$ (так как $k \geqslant 1$, если ходов было меньше 300), но тогда Паша победит, так как будет хотя бы 100 кусков массы 1 грамм. Но тогда сам Вова сделал хотя бы 300 кусков массы 2 грамма, а за оставшиеся ходы (их не больше чем 100) из этих 300 кусков он испортил не более 200 кусков, значит, хотя бы 100 кусков по 2 грамма осталось, но и в этом случае Паша выиграл.

Задача 6 [Европейский математический турнир, 2020] В какое минимальное число цветов достаточно покрасить клетки доски $n \times 3n$ так, чтобы любые две клетки, связанные ходом ферзя, были разного цвета? Напомним, что ферзь ходит на любое число клеток по вертикали, горизонтали и диагонали.

Решение: Сразу можно сказать, что цветов хотя бы $3n$, так как все клетки в нижней строке должны быть покрашены в разные цвета. Давайте покрасим первую строчку в цвета от 1 до $3n$ по порядку. А каждую следующую строчку будем красить со сдвигом на 2. По вертикали и горизонтали клетки одного цвета друг друга бить не будут. Нужно проверить,



что клетка цвета $3n$ в последней строке не окажется под боем клетки цвета $3n$ в первой строке. Пусть i номер сроки больший 1, тогда клетка цвета $3n$ в этой строке стоит в $2(i-1)$

столбце. Значит, в последней строке клетка цвета $3n$ стоит в $2n-2$ столбце (1). Теперь заметим, что если у цвета не было перехода через границу, то очевидно, что по диагонали клетки одного цвета друг друга не бьют. А если переход был, то между клеткой цвета в первой строке и в последней строке есть $n+1$ столбец (это следует из (1)), ну тогда и в этом случае по диагонали клетки одного цвета друг друга не бьют, значит, приведенная раскраска таблицы подходит.

Задача 7 [Уральский турнир юных математиков, 2015] Правила *интересной* игры в крестики-нолики следующие. По окружности, чередуясь, расположено n крестиков и n ноликов. За ход разрешается поменять местами крестик и нолик, если только соответствующие знаки еще не менялись друг с другом местами. Если после хода игрока образовалось три одинаковых знака подряд, то он проиграл. Также проигрывает игрок, не имеющий хода. Петя и Вася играют в *интересные* крестики-нолики, Петя начинает. Кто выигрывает при правильной игре в зависимости от n?

Решение: Разобьем крестики и нолики на пары (объединим в пары рядом стоящие крестики и нолики). Тогда если сходивший поменял крестик и нолик из разных пар местами, то мы поменяем парные к ним крестик и нолик местами. Важно, что пары при этом у нас сохранятся, поэтому любая пара либо не менялась вообще, либо в ней поменялись и крестик и нолик, поэтому ход у нас будет. Если же внутри пары меняют крестик и нолик, то мы возьмем другую пару и поменяем в ней крестик и нолик. Но вот осталась ли у нас пара или нет уже зависит от n. Если n четно, то описанной стратегией мы будем играть за второго, так как тогда после хода второго оставшихся пар всегда будет четно, а значит у второго всегда будет ход. Если n нечетно, то этой же стратегией играем за первого игрока, только первым ходом меняем крестик и нолик из одной пары, тогда пар останется четно, а дальше после хода первого пар всегда будет четно и у первого всегда будет ход. Осталось понять, почему у нас не образовалось три крестика или три нолика подряд при такой стратегии (при любом n). Тут надо заметить, что мы ходим так, что пары крестик и нолик остаются в своих же парах (после хода того, за которого мы играем), но если бы у нас образовались три крестика или три нолика подряд, это бы означало, что нашлась бы пара, в которой два крестика или два нолика, но такого быть не могло. Таким образом, стратегия работает.

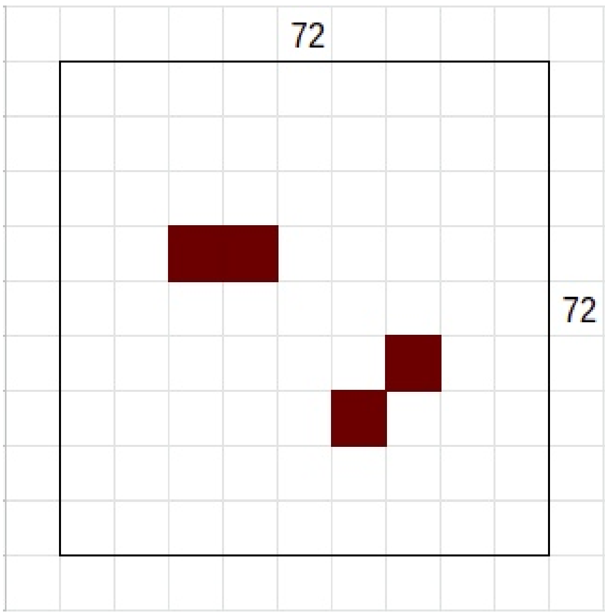
Задача 8 [ВсОШ-2017, заключительный этап] Изначально на столе лежат три кучки из 100,101 и 102 камней соответственно. Илья и Костя играют в следующую игру. За один ход каждый из них может взять себе один камень из любой кучи, кроме той, из которой он брал камень на своем предыдущем ходе (на своём первом ходе каждый игрок может брать камень из любой кучки). Ходы игроки делают по очереди, начинает Илья. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

Решение: Пусть Илья возьмет камень из кучки 101. Тогда если Костя возьмет камень из другой кучи, то Илья сможет просто брать камень с той же кучи, что и Костя. Почему? Если у Кости был ход (рассматриваем уже хотя бы второй Костин ход, так как с первыми ходами все работает), значит, на своем предыдущем ходе Костя брал камень из другой кучи, но Илья брал камень из той же кучи, поэтому сейчас он тоже может взять камень, откуда его взял Костя. Таким образом, в этом случае после хода Ильи во всех трех кучках камней четно, а значит, Костя проиграет.

Если же Костя своим первым ходом взял камень тоже из второй кучи, то Илья уже не может повторить за ним ход, так как он только что взял из этой кучи камень. Пусть тогда Илья делает вот что: если Костя берет камень из второй кучи, то он берет из первой, если Костя берет из первой кучи, то он берет из второй, если Костя берет из третей кучи, то он берет тоже из третьей кучи. Почему у Ильи всегда есть ход? Если Костя берет камень из третьей кучи, то на предыдущем ходу он брал камень из первой или второй кучи, а значит, и Илья тоже, поэтому, Илья может взять камень из третьей кучи (еще важно, что в третьей куче после хода Кости камней всегда нечетно, поэтому они там не могли закончиться после его хода). Если же Костя берет камень из первой кучи, то Илье нужно взять камень из второй, но если бы он не мог, то это бы означало, что первый своим предыдущим ходом брал камень из первой кучи, противоречие, значит, Илья может взять камень из второй кучи, причем, после его хода камней в первой и второй куче равное количество, а значит, камни во второй кучи есть. Аналогично, если Костя взял камень из второй кучи. Таким образом, выигрывает Илья.

Задача 9 [Кавказская математическая олимпиада, 2019] У Вовы есть квадрат 72×72. К сожалению, n клеток этого квадрата испачканы кофе. Всегда ли Вова может вырезать чистый квадратик 3×3 без центральной клетки, если
a) $n = 699$;
b) $n = 750$?

Решение: а) Наблюдение 1: не на границе испачканные клетки располагаются парами, то есть нет отдельно стоящей, иначе мы сразу сможем вырезать бублик. Сколько бубликов запрещает пара? Если испачканные клетки соседние по стороне, то они запрещают 12 бубликов, а если соседние по одной вершине, то 14 бубликов. Если одна клетка испачкана на границе, то она запрещает максимум 3 бублика. Так как центральная клетка бублика может быть внутри квадрата 70×70, то всего бубликов 4900. Но проблема в том, что клетки могут располагаются не парами, а, например, по три клетки. Для того чтобы доказать задачу формально, перейдем к графам.



Вершинами будут клетки, залитые кофе. Соединим клетки ребром, если они соседние по стороне или вершине. Рассмотрим одну компоненту связности. Пусть в нем k вершин. Докажем, что они запрещают не больше чем $7k$ бубликов. Заметим, что в любой компоненте связности есть такая вершина, что если ее удалить, связность сохранится. Почему это правда? Давайте выделим в графе остовное дерево. Как это сделать? Если в графе циклов нет, то он уже дерево и все хорошо, если цикл есть, то удалим одно ребро из цикла, связность не нарушится, а количество циклов в графе уменьшилось на один, так как циклов изначально было конечно, то такой операцией мы из графа выделим дерево. У дерева есть хотя бы одна вершина степени один, ее то мы и можем удалить, сохранив связность. Посмотрим на эту вершину А, она соединена хотя бы с еще одной вершиной Б. Давайте заметим, что множества бубликов, которые запрещают вершины А и Б пересекаются хотя бы по двум бубликам, поэтому количество бубликов, которые запрещает только А не больше шести. Тогда k вершин в нашей компоненте запрещают не больше чем $6(k-1)+8 = 6k+2 \leqslant 7$ бубликов (так как мы знаем, что $k \geqslant 2$). Таким образом, каждая клетка с кофе в среднем запрещает не больше 7 бубликов, значит, всего запрещено не больше $7 \cdot 699 < 4900$, поэтому найдется бублик, который мы сможем вырезать.

b) Оставляется читателям в качестве упражнения на построение примера:)

Лемма об уточнении показателя

Обозначение. Будем обозначать степень, в которой простое число p входит в разложение n на простые множители, через $v_p(n)$.

Лемма об уточнении показателя, ЛоУП, lifting the exponent lemma, LTE. Пусть a и b — различные целые числа, k — натуральное число, а p — *нечетное* простое число, НЕ ДЕЛЯЩЕЕ a и b. ЕСЛИ $a - b$ делится на p, то

$$v_p(a^k - b^k) = v_p(a - b) + v_p(k).$$

Доказательство.

Будем вести индукцию по $v_p(k)$.

(a) Докажите базу для $v_p(k) = 0$.

Решение. Заметим, что $a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \ldots + b^{k-1})$. Поскольку $a \equiv b(\mod p)$, правая скобка по модулю p сравнима с ka^{k-1}, что, очевидно, не кратно p.

(b) Докажите, пожалуйста, базу и для $v_p(k) = 1$. Это пригодится в дальнейшем.

Решение. Докажем для $k = p$. Аналогично предыдущему пункту, заметим, что $a^p - b^p = (a - b)(a^{p-1} + a^{p-2}b + \ldots + b^{p-1})$. Поскольку $a \equiv b(\mod p)$, правая скобка по модулю p сравнима с pa^{p-1}, то есть делится на p. Теперь остаётся доказать, что она не делится на p^2. Будем действовать так: заметим, что если $a \equiv b(\mod p)$, то $b = a+np$. Подставим это выражение вместо b в скобку, получим следующее выражение: $(a^{p-1} + a^{p-2}(a + np) \ldots + (a+np)^{p-1})$. Если записывать его как многочлен от p, оно примет вид $pa^{p-1} + a^{p-2} \cdot np \cdot 1 + a$ $a^{p-2} \cdot np \cdot 2 + \ldots a^{p-2} \cdot np \cdot (p - 1) + p^2 \cdot \ldots \equiv pa^{p-1} + a^{p-2}np\dfrac{p(p-1)}{2} \equiv pa^{p-1}(\mod p^2)$ (раскрываем каждую скобочку по биному Ньютона и смотрим на свободные члены и члены первой степени - очевидно, остальные делятся на p^2, и влиять на наше утверждение не будут, далее складываем все члены с p и замечаем, что p нечётно, а значит, эта сумма делится на p^2). Утверждение доказано.

Замечание. Отметим, что на стриме случилась опечатка: последней скобкой будет не $(a + np)^p$, но $(a + np)^{p-1}$. Это незначительная описка, на схему решения она не влияет.

(c) Докажите индукционный переход.

Решение. Пусть $k = p^\alpha \cdot t$ (t не кратно p). Тогда заметим, что $v_p(a^k - b^k) = v_p((a^{p^{\alpha-1}t})^p - (b^{p^{\alpha-1}t})^p)$. Т.к. основания степеней сравнимы по модулю p, можно применить здесь доказанную в предыдущем пункте базу для $p = k$. Получим $v_p((a^{p^{\alpha-1}t})^p - (b^{p^{\alpha-1}t})^p) = v_p((a^{p^{\alpha-1}t}) - (b^{p^{\alpha-1}t})) + 1$. Выполнив аналогичное действие α раз, получим, что $v_p(a^k - b^k) = \alpha + v_p(a^t - b^t)$. Но это, согласно первому пункту, равно $\alpha + v_p(a - b)$. Что и требовалось доказать.

Замечание. Заметим ещё, что вышеприведённое решение не работает при $p = 2$, т.к. $\dfrac{p(p-1)}{2}$ в этом случае не кратен p. Недостающую для этой делимости двойку можно получить из n, если оно чётно, а это равносильно тому, что $a - b$ кратно 4. Таким образом, если $a - b$ кратно 4, то LTE для $p = 2$ выполняется.

1. На какую максимальную степень пятерки делится выражение $3^{10000} - 2^{10000}$?

Решение. $v_5(3^{10000} - 2^{10000}) = (\text{по LTE}) = v_5(3-2) + v_5(10000) = 4$ - неверное рассуждение, ведь 2 и 3 не сравнимы по модулю 5. Правильным будет следующее: $v_5(3^{10000} - 2^{10000}) = v_5(9^{5000} - 4^{5000}) = v_p(9-4) + v_p(5000) = 5$. Или же $v_5(3^{10000} - 2^{10000}) = v_5(3^{10000} - (-2)^{10000}) = v_p(3 - (-2)) + v_p(10000) = 5$.

2. При каких натуральных n существуют натуральное a и простое p, для которых $3^p+4^p = a^n$?

Решение. Поймем, что $n = 1$, очевидно, подходит. При $p = 2$ левая часть равна $3^2 + 4^2 = 5^2$, так что подходит и $n = 2$. Пусть теперь p нечётно. Тогда $3^p + 4^p = 3^p - (-4)^p$. По лемме об уточнении показателя для модуля 7, $v_7(3^p - (-4)^p) = v_7(3 - (-4)) + v_7(p)$. Значит, при $p \neq 7$ выражение делится на 7, но не на 7^2, и $n = 1$. Если же $p = 7$, то выражение делится на 7^2, но не на 7^3, а значит, $n \leq 2$. Таким образом, мы убедились, что решения существуют только при $n = 1$ или $n = 2$.

3. Докажите, что показатель числа 2 по модулю 3^n равен $\varphi(3^n)$.

Замечание. Утверждение задачи эквивалентно утверждению, что двойка является первообразным корнем по модулю 3^n при любом n.

Решение. Требуется доказать, что минимальное k такое, что $2^k \equiv 1(\mod 3^n)$ равно $\varphi(3^n) = 2 \cdot 3^{n-1}$. k не может быть нечётным, так как в этом случае $2^k - 1$ попросту не будет кратно 3. Пусть теперь $k = 2t$. Преобразуем $2^{2t} - 1 = 4^t - 1^t$ и применим LTE по модулю 3. Получим $v_3(4^t - 1^t) = v_3(4 - 1) + v_3(t)$. Значит, чтобы степень вхождения тройки в данную разность была хотя бы n, требуется $v_3(t) \geq n - 1$. Таким образом, k делится на $2 \cdot 3^{n-1}$, а значит, не меньше его. При этом $k = 2 \cdot 3^{n-1}$ подходит по теореме Эйлера.

5. Решите в натуральных числах уравнение $3^x = 2^x y + 1$.

Решение. Преобразуем к виду $3^x - 1 = 2^x y$. Пусть x нечётен. Тогда $3^x - 1$ не делится на 4, откуда $x = 1$ и $y = 1$. Теперь рассмотрим случай, когда $x = 2k$. Заметим, что $3^x - 1 = 9^k - 1$. Применим здесь LTE по модулю 2. $v_2(9^k - 1) = v_2(9 - 1) + v_2(k)$. Сделаем грубую оценку: $v_2(k) < k$, откуда $v_2(9^k - 1) < k + 3$. Таким образом, решения имеются только тогда, когда $2k < k + 3$ — иначе двойка входит в левую часть в меньшей степени, чем в правую, и равенство недостижимо. Значит, $k < 3$, откуда $x = 2$ или $x = 4$. Простой подстановкой получаем, что в первом случае $y = 2$, во втором случае $y = 5$.

6. Известно, что при всех натуральных n число $4(a^n + 1)$ является точным кубом. Докажите, что $a = 1$.

Решение. Выберем какое-нибудь нечётное n. Тогда $4(a^n+1) = 4(a^n-(-1)^n)$. Рассмотрим разность $a - (-1) = a + 1$. Предположим, что она делится на какое-нибудь простое $p \neq 2$. Тогда по LTE $v_p(a^n - (-1)^n) = v_p(a+1) + v_p(n)$. Заметим теперь, что при $n = p$ или $n = p^2$ эта сумма не делится на 3, а значит, число не является кубом. Значит, предположение было ошибочным, и $a + 1 = 2^k$. Выберем $n = 3t$. Предыдущее рассуждение можно применить к числу a^3 вместо a, и оно сработает, если $a^3 + 1 \neq 2^s$. Осталось рассмотреть случай, когда $a + 1 = 2^k, a^3 + 1 = 2^s$. Заметим, что $a^3 + 1 = (a + 1)(a^2 - a + 1)$. Значит, число $a^2 - a + 1$ (очевидно, нечётное), должно быть степенью двойки, то есть равняться единице.

14. На доске написаны n цифр в ряд. Докажите, что к ним можно приписать несколько цифр слева и не более n цифр справа так, чтобы получилась степень двойки.

Решение. Рассмотрим остатки степеней двойки по модулю $10^{2n} = 2^{2n} \cdot 5^{2n}$.Покажем,что двойка — первообразный корень по модулю 5^s. Заметим, что $2^k - 1$ делится на 5^s, только если k делится на 4 (проверка остатков степеней 2 по модулю 5). Пусть $k = 4a$. Теперь по LTE $v_5(2^{4a} - 1) = v_5(16^a - 1) = v_5(16 - 1) + v_5(a)$. То есть $v_5(a) \geq s - 1$, откуда $a \geq 5^{s-1}$ и $k \geq 4 \cdot 5^{s-1}$(равно $\varphi(5^s)$).

Таким образом, двойка — действительно первообразный корень по этому модулю. Следовательно, по модулю 5^{2n} степени двойки дают $\varphi(5^{2n})$ различных остатков - в точности те, что взаимно просты с 5 (так как степень двойки не кратна пяти). Значит, существуют степени двойки, сравнимые по модулю 5^{2k} с $1, 2, 3, 4, 6....$ То есть существуют степени двойки, сравнимые по модулю 10^{2k} с $1 \cdot 2^{2n}, 2 \cdot 2^{2n}, 3 \cdot 2^{2n}, 4 \cdot 2^{2n}, 6 \cdot 2^{2n}...$ (домножаем все предыдущие степени и их остатки на 2^{2n}, это можно сделать, поскольку 2^{2n} и 5^{2n} взаимно просты).

Заметим теперь, что каждый следующий остаток отличается от предыдущего не более чем на $2 \cdot 2^{2n} < 10^n$. Значит, на каждом шаге $(n+1)$-ая с конца цифра соответствующей степени двойки увеличивается не более, чем на 1, а отсюда следует, что такими шагами мы получим на местах с $n+1$ по $2n$ любую комбинацию цифр. Собственно, выберем степень двойки, на которой мы получили данную комбинацию — она и будет искомой, которая получается дописыванием цифр.